Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie.
Promotion: $1^{ière}$ année SNV.
Corrégé type de l'examen en math-stat, 2023 -2024.

Exercise 1

Soit la fonction f définie par : $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$.
1. La fonction f est définie sur:
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash\ 1-x^2-y^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash\ x^2+y^2 < 1\}$. ....(01 pt)

2. a) Les derives partielles de premier ordre :

$\frac{df}{dx}(x,y) = \frac{-2x}{1-x^2-y^2}$; $\quad \frac{df}{dy}(x,y) = \frac{-2y}{1-x^2-y^2}$..........(01 pt)

b) La différentielle total de f:

$Df_{(x;y)} = \frac{df}{dx}(x,y) + \frac{df}{dy}(x,y) = \frac{-2x}{1-x^2-y^2} + \frac{-2y}{1-x^2-y^2} = \frac{-2x-2y}{1-x^2-y^2}$..........(0.5 pt)

3. Les derivees partielles dordre 2:

$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{-2-2x^2+2y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$; $\quad \frac{d^2f}{dxdy} = \frac{-4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$.............(01 point)

$\frac{d^2f}{dy^2} = \frac{-2+2x^2-2y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$; $\quad \frac{d^2f}{dydx} = \frac{-4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$.............(01 point)

3. Les extrmes (minimums et maximums) de f.
f a une extrme (minimum ou maximum)$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = 0 \\ \frac{df}{dy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2x}{1-x^2-y^2} = 0 \\ \frac{-2y}{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$ ....(0.5 point)

Donc f admet une extrme au point $(0;0)$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx^2}_{(0;0)} & \frac{d^2f}{dxdy}_{(0;0)} \\ \frac{d^2f}{dydx}_{(0;0)} & \frac{d^2f}{dy^2}_{(0;0)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Alors $f(0;0) = 0$ est une extrme minimum..(0.5 point)

Exercise 2 *On cosidère la fonction f définie par:*

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = sh(x)$$

1 $D_f = \mathbb{R}$ ....(01 point)

2. La fonction f est: impaire ....(01 point)

Car $D_f = \mathbb{R}$ est symtrique par rapport 0 et

$f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -f(x)$.

3. Les limites

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = +\infty \end{array}\right\} \text{...(01 point)}$$

4 Les branches infinies

a). $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}[\frac{f(x)}{x}] = +\infty \Longrightarrow (C_f)$ a une branche infinie dans la direction de la droite (yy') aux voisinage de $-\infty$ ....(0.5 pts)

b). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{x}] = +\infty \Longrightarrow (C_f)$ a une branche infinie dans la direction de la droite (yy') aux voisinage de $+\infty$.............(0.5 pts)

5 pour tous x dans $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$,...................(01 pts)

le signe de $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$...(0.5 points)

6 Le tableau de variations de f ....(0.5 points)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-∞	$\nearrow$	$+\infty$

7 l'équation $f(x) = 0$:

$$\frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow (e^{x} + e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow x = 0\text{............................}(01\ pt)$$

8 La courbe (C_f).............................(01.5 points)

Exercise 3

$$\int \frac{3x^3 - 4x^2 + 3X}{x^2 + 1} = \int 3x - 4 + \frac{4}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2}x^2 4x + 4\arctan(x^2 + 1)\text{............................}(03\ pts)$$

$$\int_1^e x^2 \ln(x)dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{9}x^3]_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}\text{............................}(03\ pts)$$